فصل چهارم-انتگرال توابع گویا

در این کاربرگ ضمن بررسی یک مثال، روشی کلی برای محاسبه‌ی انتگرال توابع گویا معرفی می‌کنیم. برای یادآوری تابعی را گویا می‌گویند که تقسیم دو چندجمله‌ای باشد.

فعالیت ۱. تابع گویای زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-x^۷ + x^۵ - x^۴ + x + ۱}{x^۶ + x^۴ + x^۲}$$

الف) $H(x)$ و $R(x)$ را در برابری زیر طوری بدست آورید که درجه $R(x)$ کوچک‌تر از درجه $Q(x)$ باشد.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

ب) طبق قضیه اساسی جبر هر چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب مختلط، دقیقا n ریشه مختلط دارد. نشان دهید که هر چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب حقیقی را می‌توان به چندجمله‌ای‌هایی از درجه یک و یا دو تجزیه کرد به طوری‌که چندجمله‌ای‌های درجه دو آن قابل تجزیه به درجه یک‌ها نیستند.

ج) $Q(x)$ را به چندجمله‌ای‌هایی از درجه یک و دو تجزیه کنید.

د) **(تجزیه کسرها)** مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{x}{x^۴ - x^۳ - x + ۱} = \frac{A}{(x-۱)} + \frac{B}{(x-۱)^۲} + \frac{Cx + D}{x^۲ + x + ۱} = \frac{\frac{۱}{۳}}{(x-۱)^۲} + \frac{-\frac{۱}{۳}}{x^۲ + x + ۱}$$

با این روش هر کسری را می‌توان به صورت حاصل‌جمع کسرهایی نوشت که مخرج‌شان چندجمله‌ای از درجه یک یا دو است. $\frac{R(x)}{Q(x)}$ را تجزیه کنید.

ه) با توجه به تجزیه کسرها برای مثال قسمت (د) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^۳ - ۱} dx &= \frac{۱}{۳}\left(\int \frac{۱}{(x-۱)^۲} dx - \int \frac{۱}{x^۲ + x + ۱} dx\right) \\ &= \frac{۱}{۳}\left(-\frac{۱}{|x-۱|} - \frac{۲}{\sqrt{۳}} \tan^{-۱}\left(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}\right)\right).\end{aligned}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، تابع اولیه $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را بدست آورید.